# בסיס

1. *B קבוצה פורשת()*
2. *B בת"ל*

# משפט

יהי V מ"ו נוצר סופי, אזי בכל בסיס יש אותו מספר של ווקטורים.

## הערה

1. אם ו => ת"ל ו
2. אם ת"ל => קיים כך שהוא צ"ל של האחרים ו
3. אם ו ת"ל => S גם ת"ל
4. יהיו אוסף של ווקטורים שונים מ0 ות"ל. קיים שהוא צ"ל של קודמיו: צ"ל של ()  
   הוכחה: באינדוקציה. האם צירוף לינארי של ? אם כן. זו התשובה, אם לא: האם צ"ל לינארי של וכן הלאה. בסוף נקבל קבוצה ת"ל כך ש בת"ל.  
   הערה:אפשר לבחור כך ש בת"ל. כזה הוא יחיד.

## הוכחה למשפט

יהי בסיסים. נניח ש(כלומר ). מתקיים ו בת"ל. כל הווקטורים האם

=> ת"ל. קיים ווקטור בקבוצה הזו שהוא צירוף לינארי של קודמיו וזה לא ווקטור (כי בת"ל). כלומר קיים כך ש הוא צ"ל של ווקטורים מהקבוצה ועבור מתקיים . נתבונן בקבוצה החדשה . מתקיים => ת"ל => קיים ווקטור ב שהוא צ"ל של קודמיו. זה איננו ווקטורים שכן בת"ל => קיים () כך ש הוא צ"ל של קודמיו ב => . נסמן ונמשיך. אחרי k פעולות נקבל קבוצה ומקיימת . אבל () ומזה נובע ש ת"ל –

סתירה

## הערה

הוכחנו:

1. בכל קבוצה פורשת את V יש לא פחות איברים מכל קבוצה בת"ל
2. יהיו ו כך ש ו בת"ל אזי קיים בסיס בV מהצורה

# הגדרה

יהי V מ"ו נוצר סופי. מספר ווקטורים בבסיס נקרא מימד.

## סימון

(ו)

## דוגמאות

1. . בסיס(סטנדרטי):
2. מימד מרחב הפתרונות למ. הומוגנית = מספר הווקטורים בבסיס = מספר פתרונות פונדמנטלים = מספר משתנים חופשיים =

# משפט

כל קבוצה בת"ל אפשר להשלים עד לבסיס(במרחב נוצר סופית)

כלומר אם בת"ל אזי קיים בסיס מהצורה כאשר

## הוכחה

יהי קבוצה פורשת(שקיימת בגלל שV נוצר סופי). נתבונן ב ונמחק אחד אחד ווקטורים שהם צ"ל של קודמיהם. נקבל קבוצה בת"ל כך ש.

# משפט

יהי V מרחב ווקטורי נוצר סופי.

1. קבוצה מינימלית יוצרת היא בסיס: יוצרת כך ש לא יוצרת לכל
2. קבוצה בת"ל מקסימלית היא בסיס: בת"ל כך ש ת"ל לכל
3. אם S יוצרת ו => S בסיס
4. אם S בת"ל ו => S בסיס

## הוכחה

1. S יוצרת. נבדוק שS בת"ל. אם S ת"ל => קיים שהוא צ"ל של וקטורים אחרים בS => כלומר S איננה מינימלית – סתירה
2. –ג) תרגיל
3. בת"ל. נבדוק שS יוצרת. קיים בסיס בV . נתבונן בקבוצה . קיימת תת קבוצה שהיא יוצרת ובת"ל => בסיס. אבל בכל בסיס יש ווקטורים => => גם יוצרת.  
     
   כל קבוצה בת"ל אפשר להשלים עד לבסיס. אבל בכל בסיס יש ווקטורים => אי אפשר להשלים כלומר היא גם יוצרת.

# משפט

יהיו V מ"ו(נוצר סופי) ו בסיס. לכל ווקטור קיימים סקלרים יחידים כך ש

# הגדרה

סקלרים נקראים קורדינטות של v ביחס לבסיס B נקרא הקואורדינטה הi של v ו נקרא ווקטור עמודה של קוארדינטות(של v ביחס לB).

# הוכחה

B קבוצה פורשת => סקלרים קיימים.

יהיו סקלרים כך ש, . נחסר: . בת"ל =>